第３講　図形と方程式

9　座標平面上の３点

$$P(0,\ -\sqrt{2}),\ Q(0,\ \sqrt{2}),\ A(a,\ \sqrt{a^2+1})\quad (0 \leqq a \leqq 1)$$

を考える．

(1)　２つの線分の長さの差 PA－AQ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ．

(2)　Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする．点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする．このとき，線分の長さの和 PA＋AB＋BC は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ．

《13 東大・文科》

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

10　座標平面において，点 P(0, 1) を中心とする半径 1 の円を C とする．a を $0<a<1$ を満たす実数とし，直線 $y=a(x+1)$ と C との交点を Q，R とする．

(1)　△PQR の面積 $S(a)$ を求めよ．

(2)　a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ．

《11 東大・理科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

11 座標平面上の１点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ をとる．放物線 $y=x^2$ 上の２点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を，３点 P，Q，R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ．

《11 東大・理科文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

12　a，b を実数の定数とする．実数 x，y が

$$x^2+y^2 \leqq 25, \quad 2x+y \leqq 5$$

をともに満たすとき，$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ．

《13 東大・文科》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　図形と方程式

9 座標平面上の3点

$$\mathrm{P}(0,\ -\sqrt{2}),\ \mathrm{Q}(0,\ \sqrt{2}),\ \mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2+1})\quad (0\leqq a\leqq 1)$$

を考える.

(1) 2つの線分の長さの差 PA−AQ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ.

(2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする．点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする．このとき，線分の長さの和 PA＋AB＋BC は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ.

《13 東大・文科》

【答】 (1) 2　(2) $4+\sqrt{2}$

【解説】 (1)

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}&=\sqrt{a^2+\{\sqrt{a^2+1}-(-\sqrt{2})\}^2}-\sqrt{(-a)^2+(\sqrt{2}-\sqrt{a^2+1})^2}\\&=\sqrt{2a^2+3+2\sqrt{2a^2+2}}-\sqrt{2a^2+3-2\sqrt{2a^2+2}}\\&=\sqrt{(\sqrt{2a^2+2}+1)^2}-\sqrt{(\sqrt{2a^2+2}-1)^2}\\&=|\sqrt{2a^2+2}+1|-|\sqrt{2a^2+2}-1|\\&=(\sqrt{2a^2+2}+1)-(\sqrt{2a^2+2}-1)\quad(\because\ \sqrt{2a^2+2}>1)\\&=\mathbf{2}\end{aligned}$$

(2) $\mathrm{B}\left(t,\ \dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2\right)$ $(t\geqq 0)$ とおける.

このとき，$\mathrm{QB}=\sqrt{(t-0)^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}$ であり，$\sqrt{a^2+1}\leqq\sqrt{2}$ より半直線 QA は直線 $y=2$ の下側にあるので，$\mathrm{BC}=2-\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2$ となる.

また，(1)より PA＝2＋AQ なので

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}&=2+\mathrm{AQ}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}\\&=2+\mathrm{QB}+\mathrm{BC}\\&=2+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\frac{\sqrt{2}}{8}t^2\right)\\&=\mathbf{4+\sqrt{2}}\end{aligned}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

10 座標平面において，点 P(0, 1) を中心とする半径 1 の円を C とする．a を $0<a<1$ を満たす実数とし，直線 $y=a(x+1)$ と C との交点を Q，R とする．

(1) △PQR の面積 $S(a)$ を求めよ．

(2) a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ．

《11 東大・理科》

【答】 (1) $S(a)=\dfrac{\sqrt{2a}\,(1-a)}{a^2+1}$　　(2) $a=2-\sqrt{3}$

【解説】 (1) P(0, 1) と直線 $y=a(x+1) \iff ax-y+a=0$ との距離を d とすると

$$d=\frac{|a\cdot 0-1+a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}} \qquad \therefore\ d=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$$

このとき $d^2=\dfrac{(1-a)^2}{a^2+1}=1-\dfrac{2a}{a^2+1}$ で $a>0$ より $d^2<1$ つまり $d<1$．また $0<a<1$ より $d=\dfrac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}>0$ なので，$0<d<1$ となり，直線 $y=a(x+1)$ は円 C と確かに異なる 2 点で交わっている．

三平方の定理より $\dfrac{\mathrm{QR}}{2}=\sqrt{1-d^2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2+1}}$ なので

$\mathrm{QR}=\dfrac{2\sqrt{2a}}{\sqrt{a^2+1}}$ となる．

よって $\boldsymbol{S(a)}=\dfrac{1}{2}\times\mathrm{QR}\times d=\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2a}\,(1-a)}{a^2+1}}$

(2) (1)より $S(a)=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{1-d^2}\times d=\sqrt{-\left(d^2-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}}$ なので，$d^2=\dfrac{1}{2}$ のとき $S(a)$ は最大となる．

このとき $\dfrac{(1-a)^2}{a^2+1}=\dfrac{1}{2} \iff a^2-4a+1=0$ であるが，$0<a<1$ より求める a は

$\boldsymbol{a=2-\sqrt{3}}$．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

11 座標平面上の１点 $P\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ をとる．放物線 $y=x^2$ 上の２点 $Q(\alpha,\ \alpha^2)$，$R(\beta,\ \beta^2)$ を，３点 P，Q，R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心 $G(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ．

《11 東大・理科文科》

【答】 $Y=\dfrac{2}{18X-3}-\dfrac{1}{12}\quad\left(\dfrac{1}{6}<X<\dfrac{1}{2}\right)$

【解説】 $\overrightarrow{QR}=(\beta-\alpha)(1,\ \alpha+\beta)$ より QR の垂直二等分線は

$1\cdot\left(x-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)+(\alpha+\beta)\cdot\left(y-\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)=0$ と表すことができ，この直線が P を通るので

$$\frac{1}{2}-\frac{\alpha+\beta}{2}+(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{4}-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)=0$$

$$\iff\ \frac{1}{2}-\frac{\alpha+\beta}{4}-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}=0\quad\cdots①$$

が成り立つ．

ここで，$\alpha+\beta=s$，$\alpha\beta=t$ とおくと，α と β は２次方程式 $x^2-sx+t=0$ の $\dfrac{1}{2}$ 以外の異なる２つの実数解なので

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2-s\cdot\frac{1}{2}+t\neq 0 \text{ かつ } (-s)^2-4t>0\quad\iff\quad t\neq\frac{1}{2}s-\frac{1}{4} \text{ かつ } t<\frac{1}{4}s^2\quad\cdots②$$

が成り立つ．

このとき

$$①\quad\iff\quad\frac{1}{2}-\frac{1}{4}s-\frac{1}{2}s(s^2-2t)=0$$

$$\iff\quad st=\frac{1}{2}s^3+\frac{1}{4}s-\frac{1}{2}\quad\cdots③$$

であるが，$s=0$ とすると③は成立しないので不適．よって $s\neq 0$ より

③ $\iff$ $t=\dfrac{1}{2}s^2+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2s}$ $\cdots④$ とできるので，これを②へ代入して

$$\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2s}\neq\frac{1}{2}s-\frac{1}{4} \text{ かつ } \frac{1}{2}s^2+\frac{1}{4}-\frac{1}{2s}<\frac{1}{4}s^2$$

$$\iff\quad (s-1)(s^2+1)\neq 0 \text{ かつ } s(s-1)(s^2+s+2)<0$$

ここで，$s^2+s+2=\left(s+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{7}{4}>0$ より $s(s-1)(s^2+s+2)<0\quad\iff\quad 0<s<1.$

このとき $(s-1)(s^2+1)\neq 0$ を満たす．

このとき，$X=\dfrac{\alpha+\beta+\frac{1}{2}}{3}$ より $X=\dfrac{s}{3}+\dfrac{1}{6}\quad\iff\quad s=3X-\dfrac{1}{2}$ であるが，

$0<s<1$ より $0<3X-\dfrac{1}{2}<1\qquad\therefore\quad\dfrac{1}{6}<X<\dfrac{1}{2}.$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

また，$Y=\dfrac{\alpha^2+\beta^2+\dfrac{1}{4}}{3}=\dfrac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\dfrac{1}{4}}{3}=\dfrac{s^2-2t+\dfrac{1}{4}}{3}$ であるが，④より

$s^2-2t=\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{2}$ なので $Y=\dfrac{\dfrac{1}{s}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}}{3}=\dfrac{1}{3s}-\dfrac{1}{12}$ となる．これに $s=3X-\dfrac{1}{2}$ を代入することで $Y=\dfrac{2}{18X-3}-\dfrac{1}{12}$ を得る．

以上より求める軌跡は，$\boldsymbol{Y=\dfrac{2}{18X-3}-\dfrac{1}{12}}\quad\boldsymbol{\left(\dfrac{1}{6}<X<\dfrac{1}{2}\right)}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

12　a，b を実数の定数とする．実数 x，y が

$$x^2+y^2 \leqq 25,\quad 2x+y \leqq 5$$

をともに満たすとき，$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ．

《13 東大・文科》

【答】

$$\begin{cases} \dfrac{(2a+b-5)^2}{5}-(a^2+b^2) & \left(2a+b>5 \text{ かつ } b \leqq \dfrac{1}{2}a+5 \text{ かつ } b \geqq \dfrac{1}{2}a-5 \text{ のとき}\right) \\ 25-10b & \left(b>\dfrac{1}{2}a+5 \text{ かつ } a>0 \text{ のとき}\right) \\ 25-8a+6b & \left(b<\dfrac{1}{2}a-5 \text{ かつ } b>-\dfrac{3}{4}a \text{ のとき}\right) \\ 25-10\sqrt{a^2+b^2} & \left(\left(a \leqq 0 \text{ または } b \leqq -\dfrac{3}{4}a\right) \text{ かつ } a^2+b^2>25 \text{ のとき}\right) \\ -(a^2+b^2) & (a^2+b^2 \leqq 25 \text{ かつ } 2a+b \leqq 5 \text{ のとき}) \end{cases}$$

【解説】　$z=x^2+y^2-2ax-2by=(x-a)^2+(y-b)^2-(a^2+b^2)$ より，$(x,\ y)$ と $(a,\ b)$ との距離を d とおくと $z=d^2-(a^2+b^2)$ なので，d が最小になる場合を考えればよい．

円 $x^2+y^2=25$ と直線 $2x+y=5$ の 2 つの共有点は $(0,\ 5)$，$(4,\ -3)$ であり，これらを順に A，B とする．

$2x+y=5$ に垂直で A を通る直線は $y=\dfrac{1}{2}x+5$，$2x+y=5$ に垂直で B を通る直線は $y=\dfrac{1}{2}x-5$ であり，

また円 $x^2+y^2=25$ の中心 $(0,\ 0)$ と A を通る直線は $x=0$，中心 $(0,\ 0)$ と B を通る直線は $y=-\dfrac{3}{4}x$ となる．

(Ⅰ)　$2a+b>5$ かつ $b \leqq \dfrac{1}{2}a+5$ かつ $b \geqq \dfrac{1}{2}a-5$ のとき，

$(a,\ b)$ から直線 $2x+y=5$ に下ろした垂線の足を $(x,\ y)$ としたとき，d は最小になり，そのとき $d=\dfrac{|2a+b-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}$ なので，z は最小値

$\left(\dfrac{|2a+b-5|}{\sqrt{5}}\right)^2-(a^2+b^2)=\dfrac{(2a+b-5)^2}{5}-(a^2+b^2)$ をとる．

(Ⅱ)　$b>\dfrac{1}{2}a+5$ かつ $a>0$ のとき，

$(x,\ y)=(0,\ 5)$ のとき，d は最小値 $d=\sqrt{a^2+(b-5)^2}$ をとるので，
z の最小値は $(\sqrt{a^2+(b-5)^2})^2-(a^2+b^2)=25-10b$

(Ⅲ)　$b<\dfrac{1}{2}a-5$ かつ $b>-\dfrac{3}{4}a$ のとき，

$(x,\ y)=(4,\ -3)$ のとき，d は最小値 $d=\sqrt{(a-4)^2+(b+3)^2}$ をとるので，
z の最小値は $(\sqrt{(a-4)^2+(b+3)^2})^2-(a^2+b^2)=25-8a+6b$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(Ⅳ)　$\left(a \leqq 0 \text{ または } b \leqq -\dfrac{3}{4}a\right)$ かつ $a^2+b^2>25$ のとき，

$(x,\ y)=\left(\dfrac{5a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{5b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ のとき，d は最小値 $d=\sqrt{a^2+b^2}-5$ をとるので，

z の最小値は $(\sqrt{a^2+b^2}-5)^2-(a^2+b^2)=25-10\sqrt{a^2+b^2}$

(Ⅴ)　$a^2+b^2 \leqq 25$ かつ $2a+b \leqq 5$ のとき，

$(x,\ y)=(a,\ b)$ のとき，d は最小値 $d=0$ をとるので，z の最小値は $-(a^2+b^2)$

以上より，z の最小値は

$$\begin{cases} \dfrac{(2a+b-5)^2}{5}-(a^2+b^2) & \left(2a+b>5 \text{ かつ } b \leqq \dfrac{1}{2}a+5 \text{ かつ } b \geqq \dfrac{1}{2}a-5 \text{ のとき}\right) \\ 25-10b & \left(b>\dfrac{1}{2}a+5 \text{ かつ } a>0 \text{ のとき}\right) \\ 25-8a+6b & \left(b<\dfrac{1}{2}a-5 \text{ かつ } b>-\dfrac{3}{4}a \text{ のとき}\right) \\ 25-10\sqrt{a^2+b^2} & \left(\left(a \leqq 0 \text{ または } b \leqq -\dfrac{3}{4}a\right) \text{ かつ } a^2+b^2>25 \text{ のとき}\right) \\ -(a^2+b^2) & (a^2+b^2 \leqq 25 \text{ かつ } 2a+b \leqq 5 \text{ のとき}) \end{cases}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。